محاضرات الدفتر

القسم: الرياضيات   السنة: الثالثة   المادة: نظرية الاحتمالات المحاضرة: ١٠ نظري

- **تعريف الفضاء الاحتمالي:**

الفضاء الاحتمالي هو عبارة عن ثلاثية من الشكل: (Ω, F, P) حيث Ω هي مجموعة نتائج التجربة عشوائية او ما يسمى بفضاء الاحداث الابتدائية وقد تكون هذه المجموعة منتهية او غير منتهية.

- ويوجد لدينا تجارب عشوائية كثيرة نذكر منها:

[1] القاء قطعة نقد معدنية مرة واحدة تمثل تجربة عشوائية مجموعة نتائجها:

$\Omega = \{H, T\}$ مجموعة منتهية

كتابة صورة

[2] القاء قطعتين نقد معدنيتين متمايزتين تمثل تجربة عشوائية مجموعة النتائج.

$\Omega = \{HH, TH, HT, TT\}$

[3] القاء ثلاث قطع نقد معدنية تمثل تجربة عشوائية عدد النتائج هو:

$N(\Omega) = 8 = 2^3$

او $|\Omega| = 2^3 = 8$

عندئذ مجموعة النتائج هي:

$\Omega = \{HHH, HTH, HHT, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$

[4] عائلة لديها ثلاث أطفال عندئذ Ω تعطى بالشكل:

$\Omega = \{bbb, bbg, bgb, gbb, bgg, gbg, ggb, ggg\}$

$N(\Omega) = 8$

- وهناك امثلة كثيرة نذكر منها:

القاء حجر نرد مرة واحدة / القاء حجر نرد مرتين / سحب شخص CD من صندوق / سحب احتمالين من CD

(كلها تجارب مجموعة نتائجها تمثل مجموعة منتهية)

- لكن اذا كانت التجربة هي اختيار عدد بشكل عشوائي من مجال $[0,1]$ عندئذ Ω سوف تمثل هذا المجال: $\Omega = [0,1]$

وواضح Ω تمثل مجموعة غير منتهية (اي مجال حقيقي)

- وفي كل الاحوال اذا كانت Ω منتهية او غير منتهية يوجد لدينا مجموعة نرمز لها F وهي المركبة الثانية من الفضاء الاحتمالي وهذه المجموعة عناصرها مجموعات جزئية من Ω معينة تسمى: جبر الاحداث اي كل عنصر من F يسمى حدثاً

وعادة يرمز لها بأحد الرموز: $A, B, C, D, \ldots$

- وفي هذه الحالة يكون فيها الحدث مكوناً او مؤلفاً من نتيجة واحدة نسميها حدثاً اولياً او [illegible] (الحدث الاولي)

محاضرات الدفتر

السنة :

مادة :

المحاضرة :

تعريف الحدث الذي يقع و الحدث الذي لا يقع :

ليكن لدينا تجربة عشوائية مجموعة نتائجها Ω. إذا كان A مجموعة جزئية منها (أي $A \subseteq \Omega$) فإن A حدث متعلق بهذه التجربة $A \in \mathcal{F}$ يعني أن $A \subseteq \Omega$ و لتكن ω نتيجة ممكنة للتجربة، نقول عن هذا الحدث إنه حدث يقع إذا كانت نتيجة التجربة تنتمي إليه.

A حدث يقع ⟸ $\omega \in A$ ، ω هي نتيجة التجربة.

أما إذا كانت نتيجة التجربة لا تنتمي لـ A عندئذ نقول أن A حدث لم يقع.

A حدث لم يقع ⟸ $\omega \notin A$

- و اعتماداً على هذين التعريفين يوجد لدينا عادة حدثين مشهورين أحدهما الحدث الأكيد وهو حدث دائم الوقوع و الحدث المستحيل نرمز له بـ $\varnothing$

- وعلى سبيل المثال: إذا كانت التجربة التالية: ثلاث قطع نقد متجانسة و متمايزة، حدد الأحداث التالية:

1. A الحدث يقع إذا حصلنا على صورتين تماماً.
2. B الحدث يقع إذا حصلنا على صورة واحدة على الأقل.
3. C الحدث يقع إذا حصلنا على أربع صور.

الحل:

1. $A = \{THH, HTH, HHT\}$
2. $B = \{\Omega\} \setminus \{TTT\}$
3. $C = \varnothing$

* ملاحظة: تعرفنا في مقرر السنة الأولى على الأحداث وهي أيضاً حدثين، تقاطع حدثين و الفرق بين حدثين وتعرفنا أيضاً على قانون دي مورغان.

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad , \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

* وأخيراً المرحلة الثالثة من الفضاء الاحتمالي والتي تسمى بالدالة الاحتمالية وهذه الدالة تحقق ما يسمى بشروط كولموغوروف: مجموع احتمالات الأحداث ومن هذه الدالة ثابت.

- ولهذا التعريف خصائص هامة نذكر منها:

1. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. $A, B \in \mathcal{F} \ , \ A \subseteq B$

عندئذ تتحقق:

① $P(A) \le P(B)$

② $P(B - A) = P(B) - P(A)$

④ $0 \le P(A) \le 1$

⑤ $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

ويمكن تعميم هذه الخاصية الى ثلاث احداث اعتبارية A, B, C نجد

⑥ $P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$

⑦ اذا كان لدينا تجربة عشوائية مفروضة مجموعة نتائجها Ω وكان A, B حدثين متعلقين بهذه التجربة عندئذ يمكن أن نكتب:

$B = B\cap\Omega = B\cap(A\cup\bar{A}) = (B\cap A)\cup(B\cap\bar{A})$

⑧ اذا كان حدثان منفصلان: $P(B) = P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B)$

$P(A) = P(B\cap A) + P(\bar{B}\cap A)$

■ الاحداث التي تشكل تجزئة للحدث الأكيد

نقول عن الاحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ أنها تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω اذا تحقق الشرطين

① $A_i\cap A_j = \phi ,\ i\ne j$

أي حدثين من هذه الاحداث متنافيان أي الاحداث متنافية مثنى مثنى

② $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

ملاحظة: اذا كانت الاحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ تشكل تجزئة للحدث الأكيد عندئذ مجموع الاحتمالات $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\Omega) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

ملاحظة: اذا كانت الاحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω وكان B أي حدث آخر متعلق بنفس التجربة عندئذ احتمال الحدث B يعطى بالعلاقة:

$P(B) = \sum P(A_i)\,P(B/A_i)$

$= P(A_1)\,P(B/A_1) + \dots + P(A_n)\,P(B/A_n)$

تعرف هذه الصيغة بصيغة الاحتمال التام.

وعلى سبيل المثال: اذا كانت لدينا ثلاث صناديق متشابهة تماماً بحيث الصندوق الأول I يحوي ٥ ساعة ذهبية و ١ ساعة فضية.

والصندوق II يحوي ٢ ساعة ذهبية و ٤ ساعة فضية

والصندوق الثالث III يحوي ٤ ساعة ذهبية.

لتكن التجربة سحب احد هذه الصناديق بشكل عشوائي ومن ثم نسحب منه ساعة عندئذ ما احتمال ان تكون هذه الساعة ذهبية؟

مثال: نفرض A_1 الحدث تم اختيار الصندوق الأول
نفرض A_2 الحدث تم اختيار الصندوق الثاني
نفرض A_3 الحدث تم اختيار الصندوق الثالث
ولكن الحدث B هو سحب ساعة ذهبية وعندما نلاحظ ان الحوادث A_1, A_2, A_3 تشكل تجزئة لـ Ω و B حدث متعلق بنفس التجربة عندئذ يمكن ان نطبق صيغة الاحتمال التام أي:

$$P(B) = P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + P(A_3)\,P(B/A_3)$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{a}{a+b} + \frac{1}{3}\,\frac{c}{c+d} + \frac{1}{3}$$

مثال ملاحظة: نفرض انه في مدرسة ابتدائية تم توزيع الدفاتر على الصف الخامس الابتدائي وعندهم تلاميذ تطلب الدفاتر لتشكيل التلاميذ ... ومن بين هؤلاء التلاميذ تلميذ احمد ثم تلميذ احمد ثانياً المطلوب ما هو احتمال ان يكون ... ثانياً متساويين في الحل النهائي.

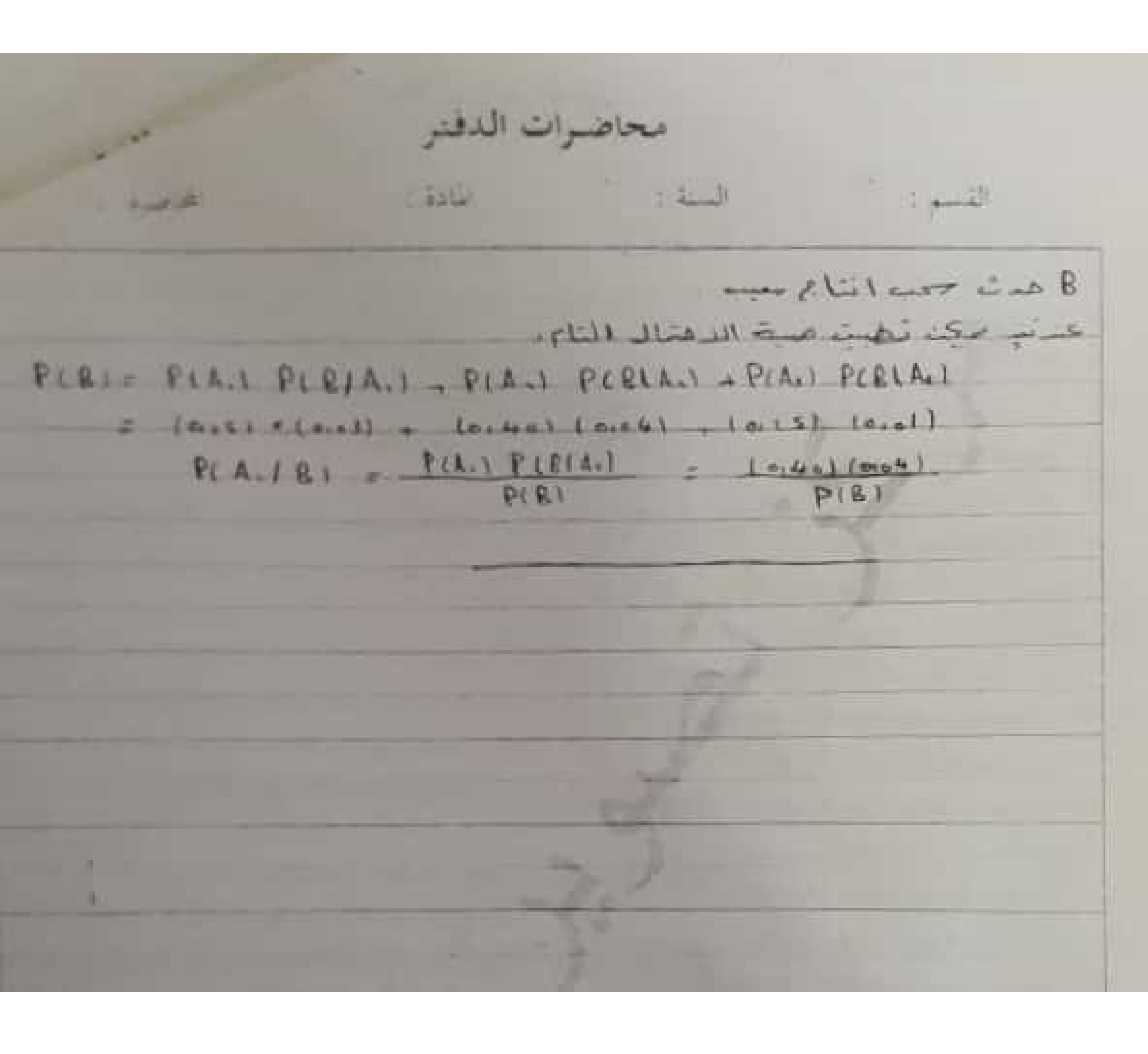
* صيغة بايز:

- اذا كانت الحوادث $A_1, \dots, A_n$ تشكل تجزئة للحدث الأكيد وكان هناك حدث B متعلق بهذه التجربة عندئذ نجد العلاقة:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B/A_i)} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

وتعرف هذه الصيغة صيغة بايز وداماً في هذه الصيغة البسط هو احد حدود المقام لذلك هذا الكسر محصور بين الصفر والواحد.

مثال على المثال: اذا كان لدينا مصنع ادوية وهذا المصنع يحتوي 3 خطوط للانتاج حيث الخط الأول ينتج ٥٠٪ من الانتاج الكلي للمصنع من بينها ٣٪ انتاج معيب (رديء) والخط الثاني ينتج ٣٠٪ من انتاج المصنع من بينها ٤٪ معيب المصنع
" الثالث " ما تبقى حيث ١٪ انتاج معيب
- ولكن التجربة سحب انتاج من هذا المصنع عندئذ ما احتمال أن يكون هذا الانتاج معيب.
- نفرض انه معيب ما احتمال أن يكون سحب من الخط الثاني:
A_1 انتاج الخط الأول
A_2 " " الثاني
A_3 " " الثالث



محاضرات الدفتر

القسم :　　　　السنة :　　　　المادة :　　　　المحاضرة :

B حدث حسب انتاج معيب

عندئذ يمكن تطبيق صيغة الاحتمال التام.

$$P(B) = P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + P(A_3)\,P(B/A_3)$$

$$= ([illegible]) \times ([illegible]) + (0.40)\,(0.04) + (0.15)\,(0.01)$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)\,P(B/A_2)}{P(B)} = \frac{(0.40)\,(0.04)}{P(B)}$$